

地盤材料の構成モデルにおける応力誘導異方性の表現

弾塑性モデル 誘導異方性 摩擦則

地域地盤環境研究所 中井照夫
千葉工業大学 金田一広
JIP テクノサイエンス 高橋寛臣

単調載荷時の地盤材料の挙動は通常等方硬化モデルで、繰返し載荷時の挙動は回転硬化則もしくは両者の組み合わせで記述されるのが普通である。しかし、静的載荷モデルと繰返し載荷モデルが異なる硬化則で説明されるのも不自然と言える。著者の一人は以前から、修正応力 t_{ij} の考え方をを使って、単調載荷時のモデル²⁾を提案している。そこでは地盤材料は応力比の変化に伴い誘導異方性が発達し且つ摩擦則に従う粒状性材料であるという認識が基本となっている。引張り応力が発生せず、中間主応力の影響も合理的に評価出来る t_{ij} の概念の物理的な意味を明確にするとともに、その概念を発展させ、繰返し載荷時の挙動も応力誘導異方性の变化を t_{ij} の概念に取り込むことにより説明できることを示す。

1. 既往のモデルの問題点

Cam clay model を含め地盤材料の多くのモデルは正八面体面に基づく平均応力と偏差応力(p, q)を使って定式化されているが、これは金属塑性論からの発展としてモデルが開発されてきたことによる。Fig.1 は応力(p, q)空間に Cam clay 型の等方硬化モデルと繰返し載荷で使われる回転硬化モデルの降伏曲面($f=0$)と直交則を模式的に描いている。上半分が三軸圧縮条件、下半分が三軸伸張条件を表す。また、応力と塑性ひずみ増分の共軸性から p 軸方向には塑性体積ひずみ増分 $d\varepsilon_v^p$ が、 q 軸方向には塑性偏差ひずみ増分 $d\varepsilon_d^p$ が対応する。同図の圧縮側の $q/p=3$ の破線と伸張側の $q/p=1.5$ の破線はそれぞれ最小主応力 $\sigma_3=0$ の状態を表し、これらの直線より左側では引張り応力が作用する領域(白塗りの領域)となる。すなわち、地盤材料のような引張りに抵抗しない材料では、同図のグレーの領域でしか応力を定義できない。しかし、(p, q) を応力パラメータとする Cam clay model やその後の派生モデルでは、降伏曲面は原点で q 軸に接する形状となる。これは地盤の変形解析に適用したとき、 q/p が大きくなった時に引張り領域(Fig.1 の白塗りの部分)に応力状態が入ることを意味する。したがって、3次元構成モデルは、中間主応力の影響はもとより、引張り領域に入らない定式化が必要であり、応力パラメータ等に制限を設けるようなモデル化は実際問題への適用で問題が生じると言わざるを得ない。また、繰返し載荷特性を表現するための多くのモデルは、Fig.1 に示す回転硬化を採用するが、地盤材料は応力比の増加に伴い異方性(応力誘導異方性)が発達することが知られている。しかし、回転硬化モデルでも、等方硬化モデル同様、流れ則(直交則)を仮定する。一方、例えば同じポテンシャル論を基本とする透水問題では、例えば異方性地盤の透水問題を扱うとき、等価な等方性地盤に変換した空間で直交則を考える。そのような意味からも、異方性空間でも直交則を仮定する回転硬化による繰返し載荷の扱いはその理論的根拠が不明確と言えよう。

2. t_{ij} の概念とその意義

これまでに3次元応力下の地盤材料の力学挙動を唯一的に表すため、拡張した空間滑動面(SMP*)³⁾をベースに、 t_{ij} の概念を提案している。この概念は、実験結果に合わせる既往の応力パラメータ(p, q)の修正ではなく、地盤材料が摩擦則(せん断応力ではなく応力比に支配される)に従う材料であり、且つ応力比の変化とともに異方性が発達する粒状体の性質を連続体に反映させたものである。Fig.2 は t_{ij} の意味を2次元的に説明している。(a)図に示すように、地盤材料は土粒子の集合体であるが、応力比の増加に伴い最大主応力方向の粒子接点が多くなり、異方性が発達する(小田⁴⁾の微視的観点からの研究)。(b)図に示すように、このような異方性の発達に応力比の増加に伴い最大主応力(σ_1)方向に硬くなる異方性連続体とみることが出来る。(c)図に示すように、このような応力比の増加に伴い異方性が発達する連続体の挙動は実際の応力比(σ_1/σ_2)よりも小さな応力比(t_1/t_2)が作用する等方性材料に置き換えられると考えられる。ここに、修正した応力は応力(比)誘導異方性を反映したテンソルの主値(a_1, a_2)を用いて $t_1=a_1\sigma_1, t_2=a_2\sigma_2$ と表す(ここに、 $a_1 < a_2$)。その結果、等方性空間で成り立つ流れ則(直交則)の合理性が保証される。一方、(d)図に示すように、金属材料では応力誘導異方性がない(あるいは顕著でない)ので通常の応力空間で流れ則が成り立つ。

さて、誘導異方性を表すファブリックテンソルについては1980年代日本では多くの議論がなされていた。その中でも佐武⁵⁾は応力比の変化によって生じる粒子節点分布の偏りはテンソルで表示でき、光弾性棒積層体を用いた二軸圧縮試験および単純せん断試験結果を参考に、その主値の比(ϕ_1/ϕ_2)は主応力比(σ_1/σ_2)の α 乗($0.4 < \alpha < 0.6$)で近似できると述べている。そして、マスとしての応力 σ_{ij} の他に接触力を求めるための応力 σ_{ij}^* を定義し、両者間に次の関係が成り立つとして

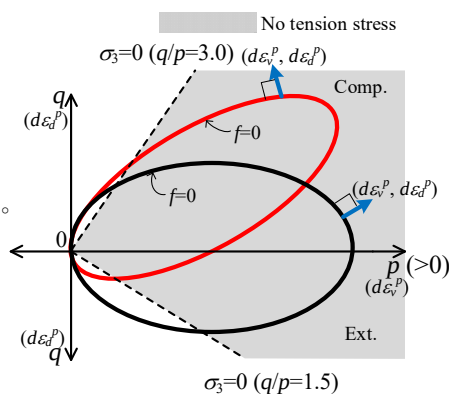


Fig.1 既往の等方硬化および回転硬化モデルの降伏曲面と流れ則

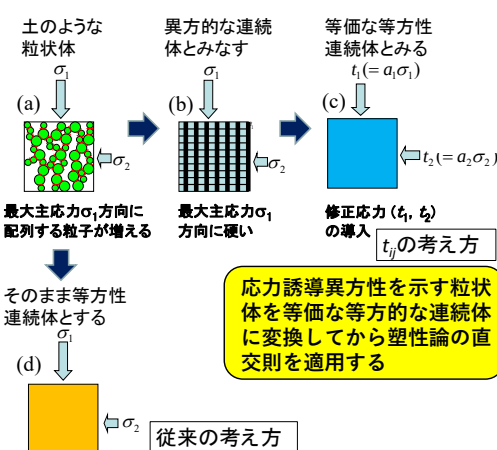


Fig.2 二次元状態での t_{ij} の概念の考え方の説明

Expression of stress induced anisotropy in constitutive modeling of geomaterials:

Teruo Nakai (Geo-Research Institute), Kazuhiro Kaneda (Chiba Institute of Technology) & Hiroomi Takahashi (JIP Tech. Science)

いる。

$$\sigma_{ij}^* = \frac{1}{2} \phi_{ik}^{-1} \sigma_{kj} \quad (2\text{次元}), \quad \sigma_{ij}^* = \frac{1}{3} \phi_{ik}^{-1} \sigma_{kj} \quad (3\text{次元}) \quad (1)$$

また、単純せん断試験結果から、主応力軸が回転する場合でも σ_{ij} の主軸と ϕ_{ij} の主軸はほぼ一致すると述べている。

一方、 t_{ij} の概念は中間主応力の影響を考慮するため開発した SMP* の考え方を発展させたものであるが、修正応力は $t_{ij} = a_{ik} \sigma_{kj}$ と表せるので、 a_{ij} が ϕ_{ij} の逆テンソル ϕ_{ij}^{-1} に対応し、その結果 t_{ij} が σ_{ij}^* に対応することが判る。また、 a_{ij} の主値は SMP の法線方向の単位ベクトルで与えている。

$$a_i = \frac{1/\sqrt{\sigma_i}}{\sqrt{(1/\sigma_1) + (1/\sigma_2) + (1/\sigma_3)}} = \sqrt{I_3/I_2} \cdot \sigma_i^{-0.5} \quad (i=1, 2, 3) \quad (2)$$

(where I_2 & I_3 : 2nd and 3rd stress invariants)

これは佐武が示した $0.4 < \alpha < 0.6$ としているべき定数 $\alpha = 0.5$ に相当する。 a_i は修正応力の主値(t_1, t_2, t_3)を使って以下のようにも表せる。

$$a_i = \frac{1/t_i}{\sqrt{(1/t_1)^2 + (1/t_2)^2 + (1/t_3)^2}} \quad (i=1, 2, 3) \quad (3)$$

次に、通常の弾塑性モデルでは多くの場合、応力の正八面体面(oct. plane)に垂直および平行な成分(p, q)を応力パラメータとして降伏関数を記述するが、 t_{ij} の概念では修正応力の t_{ij} の SMP に垂直および平行な成分(t_N, t_S)を応力パラメータとして降伏関数を記述する(Fig.3 参照)。これは、修正応力を用いて誘導異方性を考慮するとともに、粒状性材料の力学挙動を支配するのは摩擦則であることを根拠としている。なお SMP(Spatially mobilized plane)⁶⁾は3主応力が作用したとき各2主応力間でせん断垂直応力比が最大になる面の合成面での方向余弦は前述の式(2)で与えられる。すなわち、SMP の法線方向の単位ベクトルが誘導異方性を考慮するために導入したファブリックテンソルの逆テンソルの主値にも対応していることになる。

そして、降伏関数を $f = F(t_N, X = t_S/t_N) - H = 0$ (H : ひずみ硬化パラメータ)で与えたとき、Fig.4 に示すように流れ則(直交則)は通常の応力空間ではなく応力誘導異方性を考慮した修正応力空間で成り立つので、塑性ひずみ増分は次式で計算される。

$$d\varepsilon_i^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial t_i} = \frac{dF}{h^p} \left(\frac{\partial F}{\partial t_N} \frac{\partial t_N}{\partial t_i} + \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t_i} \right) \quad (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

なお、 t_{ij} と σ_{ij} は共軸性を持つので、主応力から一般応力に変換する座標変換マトリックス Q_{ij} を使って一般座標系の式に変換できる。

3. 応力履歴を考慮したモデルへの拡張

等方硬化モデルの範疇で応力履歴を受けたモデルへの拡張を20年程前に試みているが^{7),8)}、ここでは、簡便に応力履歴の影響を考慮する。これまでは σ_{ij} , a_{ij} , t_{ij} は共軸性を持っているが、誘導異方性を表す a_{ij} の中で応力履歴の影響を考慮する。単調載荷した後に除荷過程が入ったとき a_{ij} を $a_{ij}^{(m)}$ として記憶し、除荷中は変わらないものとする。そして、再載荷過程に入ったときは $a_{ij}^{(m)}$ を考慮した a_{ij}^* に置き換える(注意: ここでの上付きの*は(1)式の*とは無関係)。ここに、 a_{ij}^* も σ_{ij} と共軸性を持つと仮定し、 $a_{ij}^{(m)}$ を上述の変換マトリックス Q_{ij} を使って応力の主軸と同じ成分に変換し、その対角成分を $a_i^{(m)}$ とする。そして、 a_{ij}^* の主値を次式で与える。

$$a_i^* = (1-R)a_i + Ra_i^{(m)} \quad (i=1, 2, 3) \quad (5)$$

ここに、載荷から除荷に移った時は $R=1$ ($a_i^* = a_i^{(m)}$) となり、その後の再載荷時には塑性変形にともない R が減少し $R=0$ ($a_i^* = a_i$) でそれまでの履歴の影響は消える。その他の定式化は従来の Subloading t_{ij} model²⁾ と同じである。

Fig.5 は豊浦砂($e_0=0.66$)を平均主応力一定条件下で $q/p=1.5$ まで三軸圧縮せん断し $q/p=0$ まで戻したのち三軸圧縮側にせん断する場合と三軸伸張側にせん断する場合の計算結果を示す。なお、図中の破線は履歴を考慮しないモデルによる結果を表す。三軸圧縮側に再載荷する場合は硬い応答をし、除荷前の応力状態近くで履歴のない挙動と同じになる。一方、三軸伸張側にせん断する場合は非常に柔らかい応答を示し、大きな体積圧縮が生じることになる。ここでは R の発展則を $dR = -\mu R(\Lambda/t_N)$ で与えている。材料パラメータは豊浦砂の従来の値を使い、 $\mu=300$ として計算している。

文献

- 1) Nakai・Mihara (1984): *Soils & Foundations*, 24(2), 82-94. 2) 例えば Nakai・Hinokio (2004): *Soils & Foundations*, 44(2), 53-70. 3) 中井・松岡 (1980): *土木学会論文集*, 303, 65-77. 4) Oda (1972): *Soils & Foundations*, 12(2), 1-18. 5) 佐武 (1984): *土と基礎*, 32(11), 5-12. 6) Matsuoka・Nakai (1974): *Proc. of JSCE*, 232, 59-70. 7) 森河他 (2005): 第40回地盤工学研究発表会, 383-384. 8) 京川他 (2010): *地盤工学ジャーナル*, 5(4), 533-544.

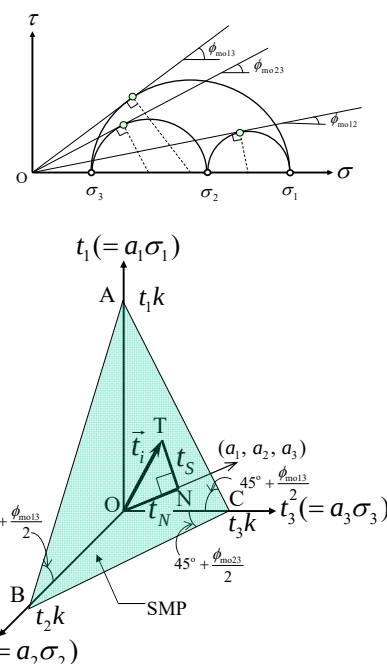


Fig. 3 SMP および応力パラメータ(t_N, t_S)

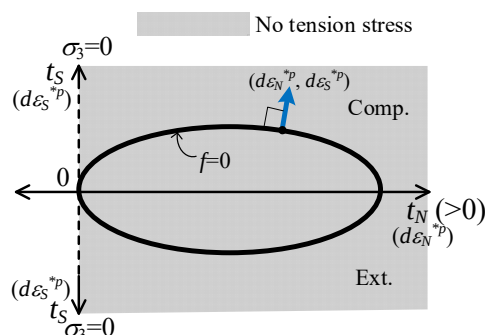


Fig. 4 t_{ij} の概念に基づくモデルの降伏曲面と流れ則

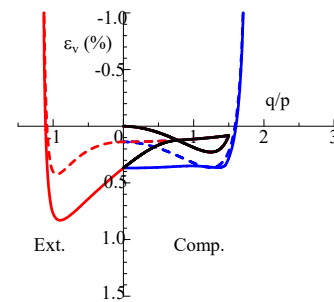
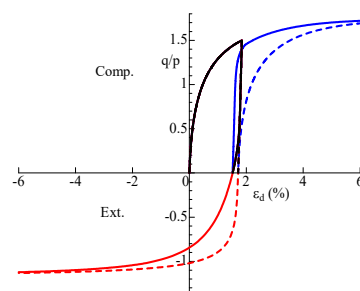


Fig. 5 応力履歴を考慮しないモデル(破線)と考慮したモデル(実線)による解析結果